ТЕМА 2. ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

Числовой последовательностью называется функция $x_n = \varphi(n)$, $n = 1,2,3,\ldots$ определенная на множестве натуральных чисел. Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число N, что при всех $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Окрестностью точки a называется интервал $(a - \varepsilon;\ a + \varepsilon)$ и обозначают $U_\varepsilon(a)$. Если число **a** является пределом последовательности $\{x_n\}$, то в $U_\varepsilon(a)$ попадают все члены данной последовательности, кроме конечного их числа.

Последовательность, имеющая предел называется сходящейся. Последовательность, у которой нет предела называется расходящейся.

!∇ Хорошим примером последовательности является наращивание денежной суммы, положенные в банк. В банк сделан вклад 1000 рублей при процентной ставке 2%. Сумма S которая будет получена через время t при условии начисления простых процентов, выражается формулой $S = 1000(1 + 0{,}02\, t)$. Если начисления производятся только по прошествии целого числа лет, то сумма является арифметической прогрессией.

Число A называется пределом функции *y=f(x)* при $x \to a$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon)$, такое, что $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $0 < |x - a| < \delta$. Записывается: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. Аналогично $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$, если $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $|x| > N(\varepsilon)$. Употребляется также условная запись $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, которая обозначает, что $|f(x)| > E$ при $0 < |x - a| < \delta(E)$, где E – произвольное положительное число.

Если c – постоянная величина, то $\lim\limits_{x\to a} c = c$. Если функции f(x) и φ(x) имеют пределы при $x \to a$, то

$$\lim_{x\to a}(f(x) \pm \varphi(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a}\varphi(x),$$

$$\lim_{x\to a}(f(x) \cdot \varphi(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a}\varphi(x),$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)} \quad (\lim_{x\to a}\varphi(x) \neq 0).$$

Односторонние пределы. Если $x < a$ и $x \to a$, то условно пишут $x \to a - 0$; аналогично, если $x > a$ и $x \to a$, то это записывается так $x \to a + 0$. Числа $f(a - 0) = \lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ и $f(a + 0) = \lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ называются соответственно *пределом слева* функции *f (x)* в точке *a* и *пределом справа* функции *f (x)* в точке *a* (если эти числа существуют).

Бесконечно малые и бесконечно большие. Если $\lim \alpha(x) = 0$, т. е. если $|\alpha(x)| < \varepsilon$ при $0 < |x - a| < \delta(\varepsilon)$, то функция α (x) называется бесконечно малой при $x \to a$. Аналогично определяется бесконечно малая *α (x)* при $x \to \infty$.

Сумма и произведение ограниченного числа бесконечно малых при $x \to a$ есть также бесконечно малые при $x \to a$. Если α (x) и β (x) – бесконечно малые при $x \to a$ и $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C$, где C – некоторое число, отличное от нуля, то функции *α (x)* и *β (x)* называются бесконечно малыми одного и того же порядка; если же C = 0, то говорят, что функция *α (x)* есть бесконечно малая высшего порядка по сравнению с *β (x).*

Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой порядка n по сравнению с функцией $\beta(x)$, если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^n}$ = C, где 0 < | C | < + ∞ .

Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ = 1, то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются равносильными (эквивалентными) бесконечно малыми при $x \to a$:

$$\alpha(x) \sim \beta(x).$$

Например, при $x \to 0$ имеем: $\sin x \sim x$; $tg\, x \sim x$; $\ln(1 + x) \sim x$ и т. п.

Замечание. При нахождении предела заменять эквивалентными бесконечно малыми функциями можно только множители и делители.

Если для любого сколь угодно большого числа N существует такое δ (N), что при $0 < | x - a | < \delta(N)$ выполнено неравенство $| f(x) | > N$, то функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to a$.

Аналогично определяется бесконечно большая $f(x)$ при $x \to \infty$. Подобно тому, как это сделано для бесконечно малых, вводится понятие бесконечно больших различных порядков.

Некоторые важные пределы:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ – первый замечательный предел;

$\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$ – второй замечательный предел;

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e;\quad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a;\quad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \alpha.$$

Пример 1. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+x-6}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg2x}{x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2}{1-\cos x}$; 5) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{arctg(x+2)}$;

6) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2-1}{5x^2+2x}$; 7) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x+4}\right)^{x-1}$.

Решение:

1. Разлагаем числитель и знаменатель дроби на множители, как квадратные трехчлены, по формуле $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$,
где x_1 и x_2 – корни трёхчлена. Тогда

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+3x+2}{2x^2+x-6} = \lim_{x\to -2}\frac{(x+1)(x+2)}{2(x+2)(x-3/2)} = \lim_{x\to -2}\frac{x+1}{2x-3} = \frac{-2+1}{-4-3} = \frac{1}{7}.$$

2. Выяснив вначале, что при указанном изменении аргумента данная функция представляет отношение двух бесконечно малых величин (случай 0/0), перейдем к эквивалентным функциям:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg\,2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x}=2.$$

3. Уничтожаем иррациональность в числителе путём умножения числителя и знаменателя на $1+\sqrt{x+1}$, затем сокращаем дробь на x:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{x+1}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\sqrt{x+1})(1+\sqrt{x+1})}{x(1+\sqrt{x+1})}=\lim_{x\to 0}\frac{1-(x+1)}{x(1+\sqrt{x+1})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{x(1+\sqrt{x+1})}=-\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\sqrt{x+1}}=-\frac{1}{2}.$$

4. Применяем тригонометрическую формулу: $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{2\sin^2 x/2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{(x/2)^2}=4;$$

5. $$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{arctg\,(x+2)}=\lim_{x\to -2}\frac{(x-2)(x+2)}{x+2}=\lim_{x\to -2}(x-2)=-4,$$ так как arctg (x+2) $\underset{x\to -2}{\approx}$ (x+2).

6. Убедившись, что имеет место случай $\frac{\infty}{\infty}$, подвергаем функцию преобразованиям. Делим числитель и знаменатель дроби на x^2 (наивысшая здесь степень x^2), находим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-1}{5x^2+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-1/x^2}{5+2/x}=\frac{3}{5};$$ так как при $x\to\infty$ величины $1/x^2$ и $1/x$ являются бесконечно малыми.

7. При $x\to\infty$ основание степенно-показательной функции

f(x) = $\left(\frac{3x-2}{3x+4}\right)^{x-1}$ стремится к 1, т.к. $\frac{3x-2}{3x+4}=1-\frac{6}{3x+4}$, а показатель степени есть бесконечно малая функция. Таким образом имеем неопределенность вида 1^{∞}. Сведем этот предел ко второму “замечательному пределу “:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-2}{3x+4}\right)^{x-1}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-6}{3x=4}\right)^{\frac{3x+4}{-6}}\right]^{\frac{-6}{3x+4}\cdot(x-1)}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{-6(x-1)}{3x+4}}=$$

$$=e^{\frac{-6}{3}}=e^{-2}.$$

Непрерывность функций

Функция f (x) называется *непрерывной* в точке a, если:

1) эта функция определена в точке a, т. е. существует число f (a);

2) существует конечный предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$;

3) этот предел равен значению функции в точке а, т. е. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Говорят, что функции f (x) терпит разрывы непрерывности при значении $x = x_0$ (или в точке x_0), принадлежащем области определения функции или являющемся граничным для этой области, если в этой точке нарушается условие непрерывности функции. Например, функция

$f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ разрывна при $x = 1$. Эта функция не определена в точке $x = 1$, и как бы мы ни выбрали число $f(1)$, пополненная функция $f(x)$ не будет непрерывной при $x = 1$. Если для функции $f(x)$ существуют конечные пределы:

$\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0 - 0)$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0 + 0)$ (причем не все три числа $f(x), f(x_0 - 0), f(x_0 + 0)$ равны между собой), то x_0 называется *точкой разрыва 1-го рода*. В частности, если $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$, то x_0 называется *устранимой точкой разрыва.* Для непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы

$$f(x_0) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0).$$

Точки разрыва функции, не являющиеся точками разрыва 1-го рода , называются *точками разрыва 2-го рода*. К точкам разрыва 2-го рода относятся также точки бесконечного разрыва, т. е. такие точки x_0 , для которых хотя бы один из односторонних пределов $f(x_0 - 0)$ или $f(x_0 + 0)$ равен ∞.

Функция y = f (x) называется непрерывной в точке x_0, если эта функция определена в какой – нибудь точке x_0 и если

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0.$$

Пример 2. Исследовать на непрерывность функцию и построить график

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x} & \text{при} \quad 0 \le x \le 1; \\ 4 - 2x & \text{при} \quad 1 < x < 2; \\ 2x - 7 & \text{при} \quad 2 \le x < +\infty. \end{cases}$$

Решение. Неэлементарная функция φ(x) определена для всех значений $x \ge 0$. Она может иметь разрыв в точках x = 1 и x = 2, где меняется ее аналитическое выражение. Во всех остальных точках своей области определения функция φ (x) непрерывна, поскольку каждая из формул, которыми она задана, определяет собой элементарную функцию, непрерывную в своем интервале изменения аргумента x.

Исследуем непрерывность в точках x = 1 и x = 2:

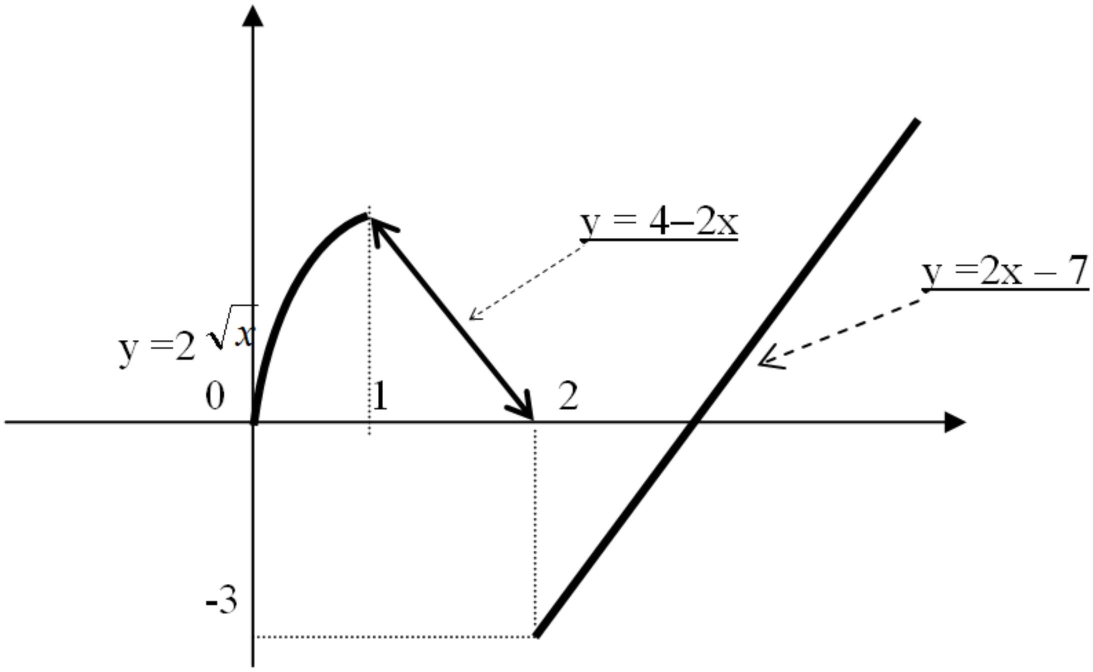
$\lim\limits_{x\to 1-0} \varphi(x) = \lim 2\sqrt{x} = 2$; $\lim\limits_{x\to 1+0} \varphi(x) = \lim(4 - 2x) = 2$.

Согласно условию, значение функции φ (x) в точке x =1 определяется первой формулой: $\varphi(1) = 2\sqrt{1} = 2$. Следовательно, в точке x =1 выполняются все условия непрерывности: функция определена в окрестности точки x =1 и $\lim\limits_{x\to 1-0}\varphi(x) = \lim\limits_{x\to 1+0}\varphi(x) = \varphi(1)$. Поэтому в точке x =1 функция φ(x) непрерывна.

$$\lim_{x\to 2-0}\varphi(x) = \lim_{x\to 2-0}(4-2x) = 0;\quad \lim_{x\to 2+0}\varphi(x) = \lim_{x\to 2+0}(2x-7) = -3.$$

Здесь левый и правый пределы функции конечны, но не одинаковы, т.е. не выполняется 2-е условие непрерывности. Поэтому в точке x=2 функция имеет разрыв.

Скачок функции в точке разрыва конечный.

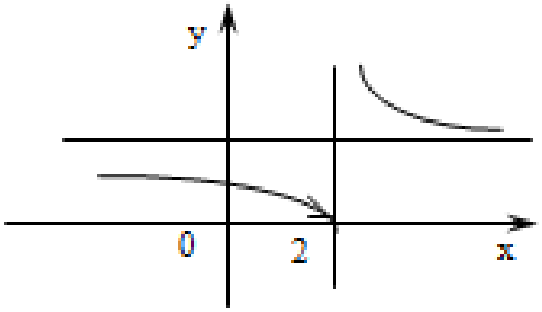


Пример 3. Исследовать функцию $f(x) = e^{\frac{1}{x-2}}$ на непрерывность.

Решение. Функция непрерывна всюду, за исключением точки $x_0 = 2$ (т.к. элементарные функции непрерывны во всех точках, где они определены). Найдем пределы слева и справа при x → 2:

$$\lim_{x\to 2-0} = e^{\frac{1}{x-2}} = 0,\qquad \lim_{x\to 2+0} = e^{\frac{1}{x-2}} = +\infty.$$

Следовательно, $x_0 = 2$ – точка разрыва II рода. Для схематического построения графика найдем предел функции на бесконечности:



$$f(x) = e^{\frac{1}{x-2}} = e^0 = 1,$$ откуда устанавливаем, что прямая y = 1 – горизонтальная асимптота .

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте определение предела последовательности, предела функции при стремлении аргумента к некоторому конечному числу и предела функции при стремлении аргумента к бесконечности.
2. Привести примеры последовательностей, имеющих и не имеющих пределы.
3. Как связано определение предела функции с понятиями ее пределов слева и справа?
4. Какая функция называется бесконечно малой и каковы ее основные свойства?
5. Какая функция называется бесконечно большой и каковы ее основные свойства?
6. Привести пример неограниченной, но не бесконечно большой величины.
7. Вывести первый замечательный предел.
8. Дать определение непрерывности функции $y = f(x)$ в точке x_0 и иллюстрировать его геометрически.
9. Что называется точкой разрыва функции?
10. Привести примеры различных функций различного характера.
11. Сформулировать свойства функций, непрерывной на замкнутом интервале. Дать геометрическую интерпретацию этих свойств.
12. Какие две бесконечно малые величины называются эквивалентными? Привести примеры эквивалентных функций.
13. Чему равны $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}$?